数理解析研究所講究録
487巻 1983年 1-17

Structures of the Haken manifolds with Heegaard splittings of genus two

阪大 理　小林 毅 (Tsuyoshi Kobayashi)

§1. Introduction

genus 1 の Heegaard splitting (H.S.) をもつような ori., closed 3-mfd. は lens sp. か $S^2 \times S^1$ で それらが同相になる条件・ホモトピー同値になる条件も知られている. しかし genus 2 の H.S. をもつような 3-mfd. はどのようなものがあるかという事についてはあまり知られていない. ここでは非自明な torus 分解をもつような genus 2 mfd. の分類を行なう. 尚. 定理の形が講演の時と少し異っている事を予め お断りしておく.

記号　○ $D(n)$ ($A(n)$, $M\ddot{o}(n)$ resp.) : Seifert fibered mfd. でその orbit mfd. が disk (annulus, Möbius band resp.) で n 本の exceptional fiber をもつようなものの集まり.

○ M_K (M_L resp.) : 2-bridge knot (link resp.) の exterior の集まり.

○ L_K : lens sp. の中の 1-bridge knot の exterior のうちで hyperbolic str. をもつか, その regular fiber が meridian loop でないような Seifert fibration を許容するようなものの集まり.

lens space の中の 1-bridge knot の定義については §5. を参照.

<u>定理</u>　M を genus 2 の H.S. をもつ closed, ori. 3-mfd. とする.　もし M が非自明な torus 分解をもつならば 次のいずれかが成立.

(i)　M は $M_1 (\in D(2))$ と $M_2 (\in L_K)$ を境界ではり合わせて得られる. 特に M_1 の regular fiber は M_2 の meridian loop と同一視される.

(ii)　M は $M_1 (\in M\ddot{o}(m),\ m = 0, 1 \text{ or } 2)$ と $M_2 (\in M_K)$ を境界ではり合わせて得られる. 特に M_1 の reg. fiber は M_2 の meridian loop と同一視される.

(iii)　M は $M_1 (\in D(m),\ m = 2 \text{ or } 3)$ と $M_2 (\in M_K)$ を境界ではり合わせて得られる. 特に M_1 の reg. fiber は M_2 の meridian loop と同一視される.

(iv)　M は $M_1, M_2 (\in D(2))$ と $M_3 (\in M_L)$ を境界ではり合わせて得られる. 特に $M_i\ (i=1,2)$ の reg. fiber は M_2 の meridian loop と同一視される.

(v)　M は $M_1 (\in A(m),\ m = 0, 1 \text{ or } 2)$ と $M_2 (\in M_L)$ を境界ではり合わせて得られる. 特に M_1 の reg. fiber は M_2 の meridian loop と同一視される.

逆に, (i) ~ (v) のような分解をもつ 3-mfd. は genus 2 の H.S. をもつ.

M_K, M_L, L_K の元の構造については Lemma 4.2, 4.4, 5.2 を参照.

Thurston は [9] で 8 種類の 3 次元幾何を定義して, 全ての 3-mfd. は幾何的分解をもつだろうと予想したが, 特に [10] では, genus 2 の H.S. をもつような 3-mfd. は全て幾何的分解をもつと主張している. この結果と上の定理を合わせれば次が得られる.

系. Mを genus 2の H.S.をもつ closed, ori. 3-mfd.とする. このとき次のいずれかが成立する.

(i) Mは [9]の中の, 8種類のうちいずれかの幾何的構造を許容する.

(ii) Mは上の定理の (i)〜(V)のうちいずれか.

特に(i)に関しては各幾何的構造に対してそれを許容する genus 2 mfd.が存在することに注意する. (§7)

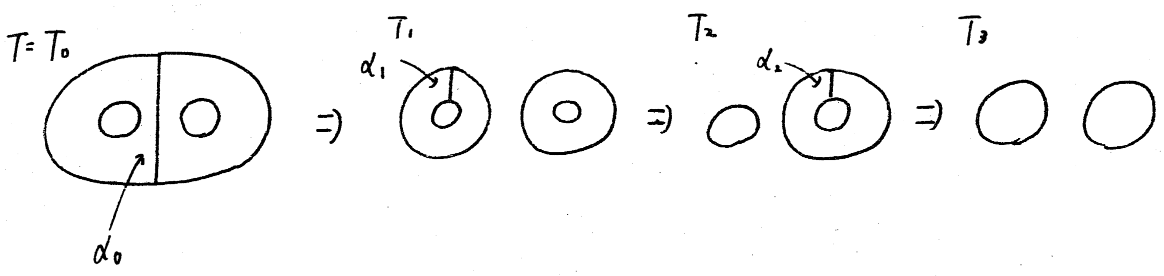
§2. hierarchy for a 2-mfd., isotopy of type A.

ここでは [4]の中で述べられている 2-mfd.の hierarchy と isotopy of type Aについて解説する.

Tを境界のある 2-mfd., αをTに properに埋め込まれた arcとする. ∂T上の arc βで $\alpha\cup\beta$がT上の diskの境界になっているものがあるとき αは <u>inessential</u> と呼ばれる. αは inessentialでないとき <u>essential</u> と呼ばれる. Tの <u>hierarchy</u> とは 2-mfd.とその中の ess. arcの pairの列

$$(T_0, \alpha_0), \cdots\cdots, (T_n, \alpha_n)$$

で $T_0 = T$, T_{i+1}は T_iを α_iで切り開いて得られ かつ T_{n+1}の各成分は diskとなっているようなものとする.

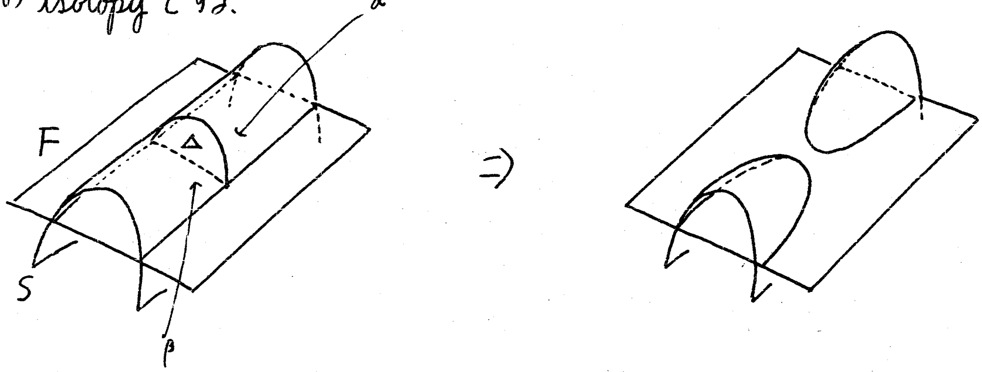


M を closed 3-mfd. とし $(V_1, V_2; F)$ を M の H.S. とする. また S を M 内の incomp. surface とする. いま F と S は transverse に交っているとし M 内の disk Δ で 次のようなものがとれたとする.

(i) $\Delta \cap S = \alpha$ は $\partial\Delta$ 内の arc,

(ii) $\Delta \cap F = \beta$ は $\partial\Delta$ 内の arc で $\partial\alpha = \partial\beta$, $\alpha \cup \beta = \partial\Delta$ をみたす.

このとき <u>α での isotopy of type A</u> とは α を Δ に沿って 滑らせて β を通りこさせるような M の isotopy とする.

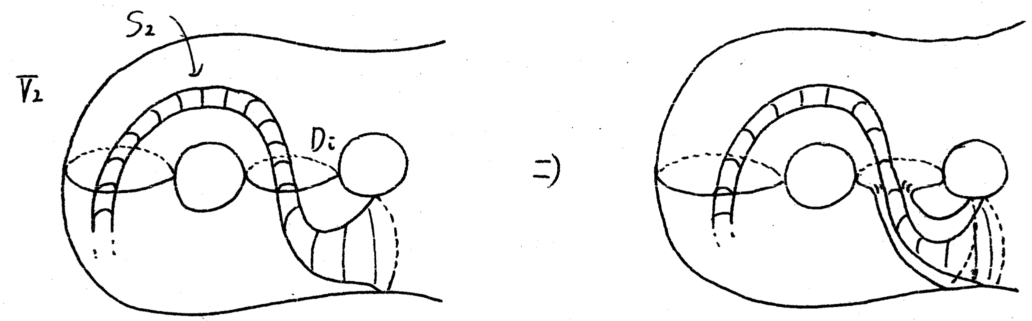


いま V_1 を 十分"細く" とることにより $S \cap V_1$ の 成分は 全て disk と仮定できる. また M は irred. とすると $S_2 = S \cap V_2$ は V_2 で incomp. となるようにできる. このとき.

"S_2 の hierarchy と それを "実現" するような M の isotopy of type A の 列が ある"

(∵) $\{D_1, \cdots, D_n\}$ を V_2 の complete な meridian system (i.e. $\cup D_i$ は V_2 を 3-cell に 切り開く) で $\cup D_i$ は S_2 と transverse に 交わるものとする. いま S_2 は incomp. より $S_2 \cap (\cup D_i) \neq \phi$. また V_2 は irred. より $S_2 \cap (\cup D_i)$ の 成分は 全て arc としてよい. いま ある D_i 上の innermost arc α で S_2 上の ess. arc で あるような ものが あったとする. このとき (S_2, α) は hierarchy の 第1段階に なり さらに M の α での isotopy of type A, h_t $(0 \le t \le 1)$ で $h_1(S) \cap V_2$ が

"S_2 cut along α" になっているようなものがある. 全ての D_i 内の innermost arc は S_2 上の inessential arc であるときは 下のような D_i のはり換えを くり返すことにより innermost な ess. arc を 見出す.



上の 操作を くり返すことにより 求める S_2 の hierarchy と isotopy of type A の 列が 得られる.

§3. Essential annuli in genus two handlebody

F を 3-mfd. M の 中に proper に 埋め込まれた 境界をもつ connected surface とする. F は, incomp., かつ ∂M 上の surface に parallel でないとき essential であると 呼ばれる. M を F で 切り開いたとき F の copies が, その 切り口上に 現れるが, それらの 各成分を また F と 書くことにする. ここでは genus 2 handlebody 内の ess. annuli の 位置について 考える. まず solid torus (: genus 1 handlebody) は ess. annulus を 含まないことに 注意する. 即ち

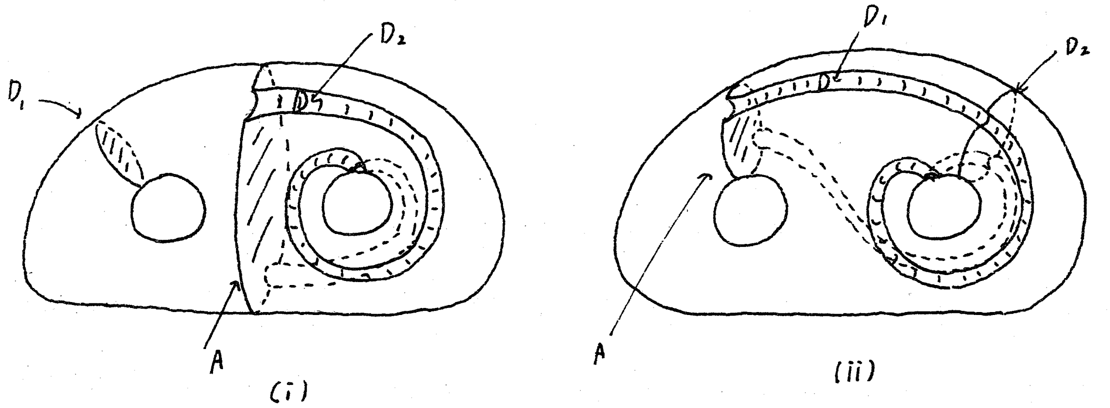
Lemma 3.1 A を solid torus 内の incomp. annulus とする. このとき A は boundary parallel.

証明略

Lemma 3.2. A を genus 2 handlebody V 内の ess. annulus とする.
このとき 次のいずれかが 成立

(i) A は V を solid torus V_1 と genus 2 handlebody V_2 に 切り開く. V_2 の meridian disk の complete system $\{D_1, D_2\}$ で $D_1 \cap A = \phi$, $D_2 \cap A$ は A の an ess. arc であるようなものがある.

(ii) A は V を genus 2 handlebody V' に 切り開く. V' の meridian disk の complete system $\{D_1, D_2\}$ で $D_1 \cap A$ が A の an. ess. arc であるようなものがある.



略証. A は V 内で incomp. だから §2 の 議論により V 内の disk Δ で "$\Delta \cap A = \partial\Delta \cap A = \alpha$ は A の ess. arc", "$\Delta \cap \partial V = \beta$ は $\partial\Delta$ 内の arc で $\partial\alpha = \partial\beta$, $\alpha \cup \beta = \partial\Delta$ をみたす" ものが見出せる. Δ に 沿って A を surgery することにより V 内の proper disk D が 得られる. A は ess. より D は not boundary parallel. 従って "D は V を 2つの solid tori に 分解する" か "D は V の meridian disk" で 各々の 場合に 対して (i), (ii) が 成立する.

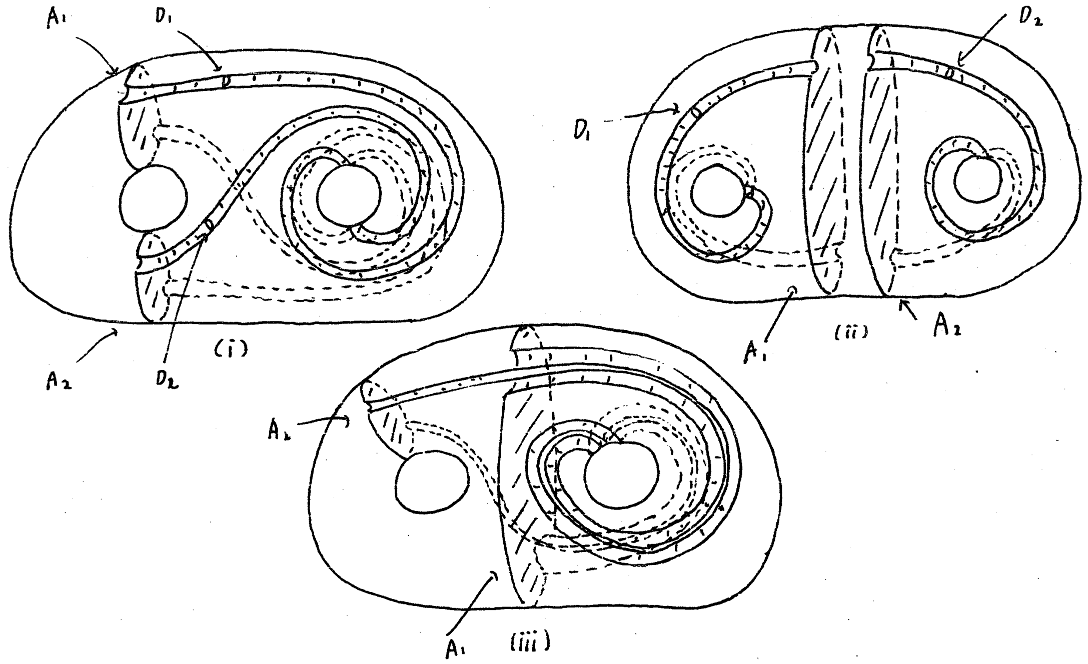
同様の 議論により 次の 2つの Lemmas も 証明される.

Lemma 3.4. $\{A_1, A_2\}$ を genus 2 handlebody V 内の 互いに disjoint, non-parallel な ess. annuli とする. このとき 次のいずれかが 成立.

(i) $A_1 \cup A_2$ は V を solid torus V_1 と genus 2 handlebody V_2 に 切り開く. ここで $A_1, A_2 \subset \partial V_1$, $A_1, A_2 \subset \partial V_2$ また V_2 の meridian disk の complete system $\{D_1, D_2\}$ で $D_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$, $D_i \cap A_i$ $(i=1,2)$ が A_i の an ess. arc なるものがある.

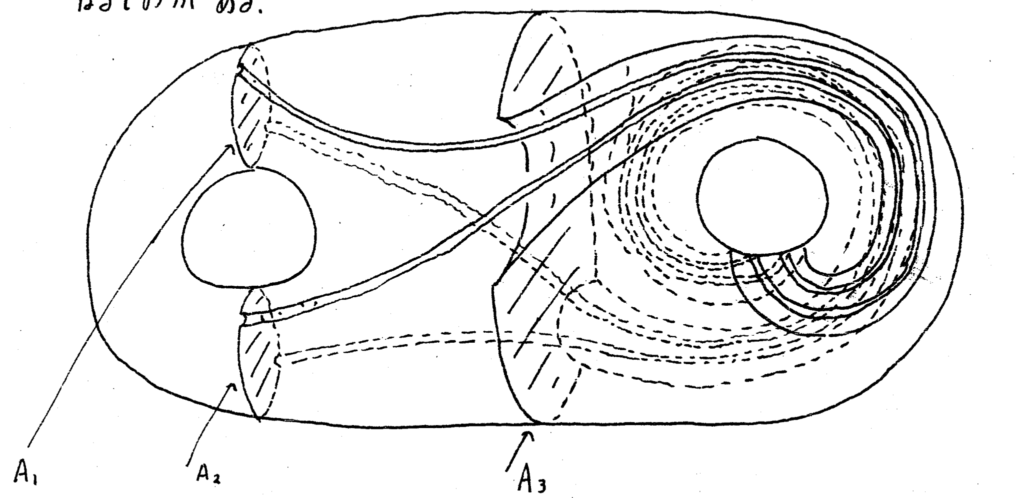
(ii) $A_1 \cup A_2$ は V を 2つの solid tori V_1, V_2 と genus 2 handlebody V_3 に 切り開く. ここで $A_i \subset \partial V_i$ $(i=1,2)$, $A_1, A_2 \subset \partial V_3$ また V_3 の meridian disk の complete system $\{D_1, D_2\}$ で $D_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$. $D_i \cap A_i$ は A_i $(i=1,2)$ の an ess. arc となるものがある.

(iii) $A_1 \cup A_2$ は V を solid torus V_1 と a genus 2 handlebody V_2 に 切り開く. $A_i \subset \partial V_1$ ($i=1$ or 2 いま 1 とする), $A_2 \cap V_1 = \phi$. $A_1 \subset \partial V_2$. V_2 の meridian disk の complete system $\{D_1, D_2\}$ で $D_1 \cap A_2$ が an ess. arc of A_2, $D_2 \cap A_i$ $(i=1,2)$ が A_i の ess. arc であるようなものがある.



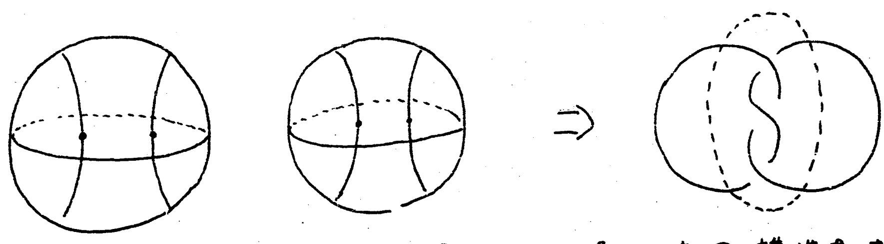
Lemma 3.5. $\{A_1, A_2, A_3\}$ を genus 2 handlebody V 内の 互いに disj., non-parallel な ess. annuli とする. このとき $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ は V を 2つの solid tori V_1, V_2 と genus 2 handlebody V_3 に切り開き 次が成立する.

1. $A_i \subset \partial V_1$ ($i = 1, 2$ or 3. 1は $i=3$ とする), $A_1, A_2 \subset \partial V_3$. $A_1, A_2, A_3 \subset \partial V_2$
2. V_3 の meridian disk の complete system $\{D_1, D_2\}$ で $D_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$. $D_i \cap A_i$ $(i = 1, 2)$ は A_i の ess. arc になるものがある.
3. V_2 の meridian disk D_3 で $D_3 \cap A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が A_i の ess. arc になるものがある.



§4. Two bridge knot, link complements

2本の arc からなる trivial tangle の和として書けるような knot (link resp.) を 2-bridge knot (link resp.) と呼ぶ[8].



ここでは 2-bridge knot (link) の complement の構造を調べる.

knot 又は link K の complement を $Q(K)$ と書くことにする.

Lemma 4.1. V_i $(i=1,2)$ を genus 2 handlebody. $\{A_1^i, A_2^i\}$ を ∂V_i 上の互いに disj. な incomp. annuli で次のような V_i の meridian disk の complete system $\{D_1^i, D_2^i\}$ があるとする. (i) $D_k^i \cap A_l^i = \phi$ $(k \neq l)$, (ii) $D_k^i \cap A_k^i$ $(k=1,2)$ は A_k^i の an ess. arc. $h: cl(\partial V_1 - (A_1^1 \cup A_2^1)) \to cl(\partial V_2 - (A_1^2 \cup A_2^2))$ を homeo. とすると $M = V_1 \underset{h}{\cup} V_2$ は ある 2-bridge knot (or link) の complement に 同相で, 特に ∂A_j^i の comp. は その meridian loop に 対応している.

証明. [5] の section 4 と同様の議論により証明できる.

Lemma 4.2 K を 2-bridge knot とする. このとき $Q(K)$ は hyperbolic str. を 許容するか, その orbit mfd. が disk で 2本の exceptional fiber をもつ Seifert fibration を 許容する.

証明. [8] より K は simple knot, 従って [9] と torus theorem [4] により $Q(K)$ は hyp. str. をもつか, special Seifert fibered mfd. [4] になる. $Q(K)$ が special Seifert fibered mfd. とすると その orbit mfd. は disk で 高々 2本の exceptional fiber をもつか, orbit mfd. は Möbius band で exceptional fiber をもたない. orbit mfd. が Möbius band のとき $Q(K)$ は Klein bottle 上の twisted I-bundle になるが, S^3 は Klein bottle を 含まないから これは 不可能.

Lemma 4.3 2-bridge link は simple link.

証明略

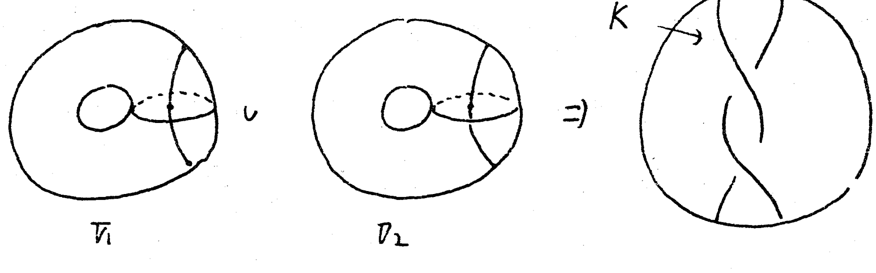
Lemma 4.4 L を 2-bridge link とすると $\Omega(K)$ は hyp. str. をもつか、orbit mfd. が annulus で高々 1本の exceptional fiber をもつような Seifert fibration を許容する。

証明は Lemma 4.2 の時と同様にしてなされる。

§5. 1-bridge knots in lens spaces

ここでは lens space 内の 1-bridge knot を定義しその complement の構造について述べる。

[1] に従って genus 1 の H.S. をもつ ori., closed 3-mfd. を lens sp. と呼ぶことにする。よってここでは $S^2 \times S^1$, S^3 も lens sp. と考える。K を lens sp. L_n の中の knot とする。L_n の genus 1 H.S. $(V_1, V_2; F)$ で $V_i \cap K$ $(i=1,2)$ が V_i の中に trivial に入っている an arc になるようなものがあるとき K を L_n の中の 1-bridge knot と呼ぶ。Lens space の中の knot K の complement を $\Omega(K)$ と書くことにする。



Lemma 5.1. V_i $(i=1,2)$ を genus 2 handlebody. A_i を ∂V_i 上の incomp. annulus で 次のような V_i の meridian disk の complete system $\{D_1^i, D_2^i\}$ が存在するとする. (i) $D_1^i \cap A_i = \phi$ (ii) $D_2^i \cap A_i$ は A_i の an ess. arc. $h: cl(\partial V_1 - A_1) \to cl(\partial V_2 - A_2)$ を homeo. とすると $M = V_1 \underset{h}{\cup} V_2$ は ある lens sp. の中の 1-bridge knot の complement に 同相で 特に ∂A_i の comp. は その meridian loop に 対応する.

証明は Lemma 5.1 の 時と 同様の 議論によりなされる.

Lemma 5.2. K を lens sp. L_m 内の 1-bridge knot とする. いま $Q(K)$ は incomp. な boundary をもつ Seifert fibered mfd. とし その regular fiber は meridian loop とする. このとき 次の いずれかが 成立.

(i) $Q(K) \in D(2)$. $\partial Q(K)$ 上の regular fiber は meridian loop と transverse に 1点で交わる.

(ii) $Q(K) \in M\ddot{o}(1)$. $\partial Q(K)$ 上の reg. fiber は meridian loop と transverse に 1点で交わる.

(iii) $Q(K)$ は Klein bottle 上の twisted I-bundle.

証明略.

§6. Proof of Theorem

Lemma 6.1. M は ∂M の comp. が全て torus であるような simple mfd. とする. いま M が ess. annulus を含むなら M は Seifert fibered mfd. である.

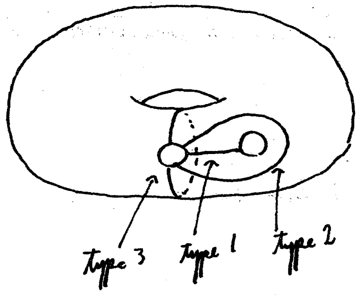
証明. Characteristic Seifert pair theorem と Homotopy annulus theorem [4] より直ちに従う.

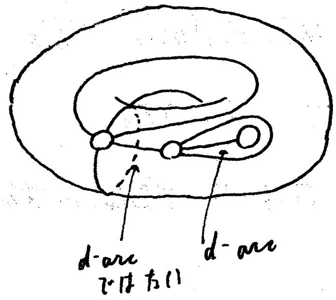
以下. いくつかの場合に分けて定理を証明する.

<u>Case 1.</u> M が non-separating incomp. torus を含む場合

この時 [5] Theorem 2 より定理の結論 (V) の成立することがわかる.

$\{a_1, \cdots, a_n\}$ を punctured torus T の中の互いに disj. な ess. arc の system とする. a_i は ∂T の相異なる成分を結んでいる時 type 1 と呼ばれる. また ∂T の1つの成分を結び T を分離するとき type 2 と呼ばれ. ∂T の1つの成分を結び T を分離しないとき type 3 と呼ばれる. a_i は type 1 で, かつ "∂T のある成分 S で a_i は S を結ぶ唯一の arc であるようなものがある" とき <u>d-arc</u> と呼ばれる. ([2])





<u>Case 2.</u> M は torus 分解により 2つの成分 M_1, M_2 に分解される時.

T を M の torus 分解を与える torus とする. いま $T \cap V_1$ の成分は全て disk とし その個数は最小とする (i.e. T' を T に isotopic な torus で $T' \cap V_1$ の成分は全て disk とすると $\#(T \cap V_1) \leq \#(T' \cap V_1)$). $T_2 = T \cap V_2$ とする. §2 より T_2 の

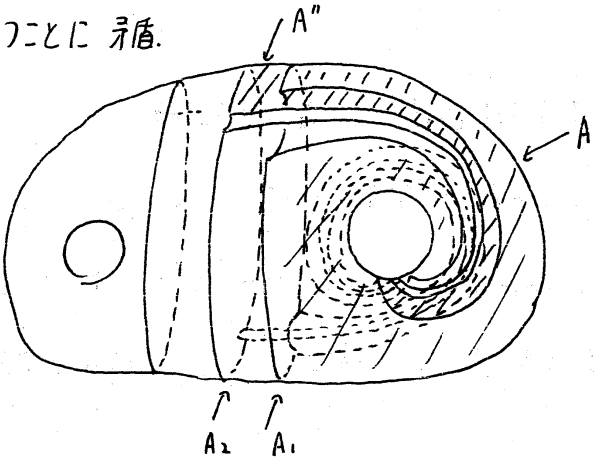
hierarchy $(T_2^{(0)}, \alpha_0), \cdots, (T_2^{(m)}, \alpha_m)$ とそれを実現する M の isotopy of type A の列が定まる. $T^{(1)}$ を α_0 で isotopy of type A を行ったときの T の image, $T^{(k+1)}$ $(k \geq 1)$ を α_k で isotopy of type A を行った時の $T^{(k)}$ の image とする. 即ち $T^{(i)} \cap V_2 = T_2^{(i)}$.

主張　$T \cap V_1$ は高々 2つの成分よりなる.

(証)　いま $T \cap V_1$ が $n (\geq 3)$ 個の disk $D_1, \cdots, D_n$ よりなるとする. このとき [2] より α_0, α_1 は type 3 arc でしかも ∂T_2 の相異なる成分より出ていることがわかる. (詳しくは [5] Lemma 3.1, 3.2, 3.3 参照). よって $T^{(1)} \cap V_1 = A_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. $T^{(2)} \cap V_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup D_n$ としてよい. ここで A_i は V_1 の ess. annulus

◦ D_1, D_2 は V_1 を分離ししかも A_1 と A_2 は V_1 で parallel な時

このとき ∂V_1 の annuli A', A'' で $A' \cap (A_1 \cup A_2) = A' \cap A_1 = \partial A' = \partial A_1$, $A'' \cap (A_1 \cup A_2) = \partial A''$, $A' \cap A''$ は a component of $\partial A'$ となるものがある. このとき $A' \subset M_1$, $A'' \subset M_2$ としてよい. $T \cap V_1$ の最小性により A' (A'' resp.) は M_1 (M_2 resp.) の中の ess. annulus であることがわかる. よって Lemma 6.1 と [4] Theorem VI. 34 より M_1 (M_2 resp.) には A' (A'' resp.) が reg. fiber の和になっているような Seifert fibration の入ることがわかる. 従って M は Seifert fibration を許容することがわかるがこれは M が非自明な torus 分解をもつことに矛盾.



○ D_1がV_1を分離し、D_2がV_1のmeridian diskであるとき.

この時も上と同様にして矛盾が出せる.

・○ D_1, D_2がV_1を分離し A_1, A_2はnon-parallelの時.

この時 a_2もまたtype 3で $T^{(3)}\cap V_1 = A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup D_m$ となる、A_3はA_1又はA_2にparallelで上と同様にして矛盾が出る.

○ D_1, D_2がV_1のmeridian disksの時

この時も $T^{(1)}\cap V_1 = A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup D_m$ となり矛盾が出る.

いま A_1 はincomp.より D_1がmeridian diskでD_2がV_1を分離することはない.

以上により主張が示された. よって次の2つのsubcase 2.1, 2.2が得られる.

<u>Case 2.1</u> $T\cap V_1$は a disk D_1 よりなる時

$A_1 = V_1\cap T^{(1)}$, $A_2 = V_2\cap T^{(1)}$とする. Lemma 3.2よりA_iはV_iをsolid torus V_i^1とgenus 2 handlebody V_i^2に切り開く. V_1^1とV_2^1を$cl(\partial V_i^1 - A_i)$に沿ってはり合わすことによりM_1 ($\in D(2)$)が得られ, V_1^2とV_2^2を$cl(\partial V_i^2 - A_i)$に沿ってはり合わすことによりM_2 ($\in L_K$)が得られる (Lemma 5.1). 従って定理の結論 (i) が得られた.

<u>Case 2.2</u> $T\cap V_1$は2つのdisks D_1, D_2よりなる時.

$A_1\cup A_2 = T^{(2)}\cap V_1$, $A_1'\cup A_2' = T^{(2)}\cap V_2$とする. $\{A_1, A_2\}$ ($\{A_1', A_2'\}$ resp.)はV_1 (V_2 resp.)の中のess. annuli. このとき$\{A_i'', A_2''\}$に対してLemma 3.4の結論のいずれかが成立することが示せる. 特にTはconnectedだから$\{A_1, A_2\}$, $\{A_1', A_2'\}$

が同時に結論(ii)をみたすことはない．また T は M で separating より $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1', A_2'\}$ は結論(iii)をみたさない．従って次の2つの subcase が得られる．

<u>Case 2.2.1</u> $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1', A_2'\}$ ともに Lemma 3.4 の結論(i)をみたすとき．

このとき $A_1 \cup A_2$ ($A_1' \cup A_2'$ resp.) は V_1 (V_2 resp.) を solid torus $V_1^{(1)}$ ($V_1^{(2)}$ resp.) と genus 2 handlebody $V_2^{(1)}$ ($V_2^{(2)}$ resp.) に分ける．$V_1^{(1)}$ と $V_1^{(2)}$ を $cl(\partial V_1^{(i)} - (A_1 \cup A_2))$ にそってはり合わせることにより M_1 ($\in M_{\ddot{0}}(m)$, $m = 0, 1$ or 2) が得られ $V_2^{(1)}$ と $V_2^{(2)}$ を $cl(\partial V_2^{(i)} - (A_1 \cup A_2))$ にそってはり合わすことにより M_2 ($\in M_K$) (Lemma 4.1) が得られる．従って定理の結論(ii)が得られた．

<u>Case 2.2.2</u> $\{A_1, A_2\}$ は結論(i)，$\{A_1', A_2'\}$ は結論(ii)をみたすとき．

このときは M_1 ($\in D(m)$, $m = 2$ or 3)，M_2 ($\in M_K$) となることがわかる．(iii)

<u>Case 3.</u> M は torus 分解により3つの成分 M_1, M_2, M_3 に分れる時．

T_1, T_2 を torus 分解を与える torus とし $T = T_1 \cup T_2$ とする．このとき $T \cap V_1 = A_1 \cup A_2$, $T \cap V_2 = A_1' \cup A_2'$ (A_i は V_1 の ess. annulus．A_i' は V_2 の ess. annulus) とできることが示せる．また各 T_i は M で separating より $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1', A_2'\}$ は Lemma 3.4 の結論(ii)をみたすことがわかる．これから M_1, M_2 ($\in D(2)$)，M_3 ($\in M_L$) となることがわかる (iv)．

また Case 2 の議論により M は torus 分解により4つ以上の成分に分かれることはない事がわかる．

以上により定理が証明された．

§7. Geometric structures of the 3-mfds with H.S. of genus two.

ここでは [9]の中の8種類の幾何的構造の各々を許容する genus 2 mfd. が存在することを示す。

Lemma 7.1 Mを Seifert fibered mfd. で orbit mfd. が 2-sphere で exceptional fiber を3本含むとする。このとき M は genus 2 の H.S. をもつ。

証明略

Lemma 7.1 と [6]の結果を合わせることにより 1型, 2型, 5型, 6型, 7型の geometric str. をもつ genus 2 mfd. が存在することがわかる。

3型の geometric str. (hyp. str.) をもつような genus 2 mfd. の例は figure eight knot の hyp. Dehn surgery によって得られる [11].

4型の geometric str. をもつ closed 3-mfd. は $S^2\times S^1$ か $P^3\#P^3$ だけだがそれらは genus 2 の H.S. をもつ。

hyperbolic な monodromy をもつ torus bundle は 8型の geometric str. をもつ [9]. 従って monodromy が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$ $(m\geq 3)$ であるような torus bundle は 8型の geom. str. をもつ また [3]より genus 2 の H.S. をもつ。

References

[1] J. Hempel: 3-manifolds, Ann. of Math. Studies No. 86, Princeton N. J., Princeton University Press 1976

[2] M. Ochiai: On Haken's theorem and its extension, Osaka J. Math. (to appear)

[3] M. Takahashi, M. Ochiai: Heegaard diagrams of torus bundle over S^1, Comm. Math. Universitatis Sancti Pauli 31 (1982) 63-69

[4] W. Jaco: Lectures on three manifold topology, Conference board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. No. 43 1980

[5] T. Kobayashi: Non-separating incompressible tori in 3-manifolds, J. Math. Soc. Japan (to appear)

[6] S. Kojima: Geometric structures on special Seifert fibered spaces, preprint

[7] W. Magnus: Noneuclidean tessalations and their groups, Academic Press 1974

[8] D. Rolfsen: Knots and links, Mathematics Lecture Series 7, Berkeley Ca., Publish Inc. 1976

[9] W. Thurston: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 357 - 381

[10] ___________: Three manifolds with symmetry, preliminary report (1982)

[11] ___________: Geometry and topology of 3-manifolds, Lecture notes, Princeton University (1978)